Devoir maison n° 9 - Correction

Exercice 1. (*d'après CCINP TSI 2024*)
L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence de la borne inférieure suivante :

$$m = \inf\left\{\int_0^1 \frac{\left(x^2 - ax - b\right)^2}{1+x}\,\mathrm{d}x,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Plus précisément, nous allons montrer que cette borne inférieure existe et est atteinte en un unique couple (a,b) de R^2.

Partie I - Étude d'une suite d'intégrales

On pose, pour tout entier naturel n :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Q1. Calculer I_0.

On a directement $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \boxed{\ln 2}$.

Q2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la valeur de I_1.

- Soit $n \geqslant 0$. Par linéarité de l'intégrale :

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n\cancel{(1+x)}}{\cancel{1+x}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{n+1}}.$$

- En utilisant cette égalité pour $n=0$, on obtient $I_0 + I_1 = 1$, d'où via **Q1**, $\boxed{I_1 = 1 - \ln 2}$.

Q3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On étudie le signe de $I_{n+1} - I_n$..
Par linéarité de l'intégrale et en factorisant comme dans la question précédente :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

car sur $[0\,;1]$, $x-1 \leqslant 0$, $x^n \geqslant 0$ et $1+x \geqslant 0$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\geqslant 0} \text{ est décroissante}}$.

Q4. Montrer que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et que sa limite est 0.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0\,;1]$, $\dfrac{x^n}{1+x} \geqslant 0$ donc par croissance de l'intégrale, $I_n \geqslant 0$. La suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est donc minorée (par 0) et décroissante (d'après la question précédente) donc $\boxed{\text{elle est convergente}}$.

⚠ *Remarque : Ceci ne suffit pas pour conclure concernant la valeur de la limite.*

- Notons $\ell = \lim I_n$ (qui existe d'après le point précédent). En passant à la limite dans l'égalité de **Q2**, on obtient $\ell + \ell = 0$, d'où $\boxed{\ell = 0}$.

Q5. En utilisant **Q2** et **Q3**, montrer que :

$$\forall n \geqslant 1,\ \frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n},$$

et en déduire un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

- Soit $n \geqslant 1$. Par décroissante de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$, on a $I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant I_{n-1}$ et donc en ajoutant I_n :

$$I_n + I_{n+1} \leqslant 2I_n \leqslant I_n + I_{n-1}.$$

Or d'après **Q2**, le membre de gauche vaut $\frac{1}{n+1}$ et celui de droite $\frac{1}{n}$. En divisant par 2, on obtient bien l'inégalité $\boxed{\dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2n}}$.

- Ensuite, en multipliant par $2n$ l'encadrement précédent, on obtient $\dfrac{2n}{2n+2} \leqslant 2nI_n \leqslant 1$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{2n+2} = 1$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nI_n = 1$, autrement dit $\boxed{I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}}$ (car le quotient de ces deux quantités tend vers 1).

Partie II - Étude d'un produit scalaire

On note $E = \mathbb{R}[X]$ et on pose

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Q6. Montrer que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

Remarquons tout d'abord que l'application est bien définie car il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0\,;1]$.

Symétrie : Pour $(P,Q) \in E^2$, on a $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{Q(x)P(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \langle Q \mid P \rangle$.

Linéarité à gauche : Soient $(P_1, P_2, Q) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\langle \lambda P_1 + P_2 \mid Q \rangle &= \int_0^1 \frac{(\lambda P_1(x) + P_2(x))Q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda \int_0^1 \frac{P_1(x)Q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{P_2(x)Q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda \langle P_1 \mid Q \rangle + \langle P_2 \mid Q \rangle .\end{aligned}$$

linéarité de l'intégrale

Linéarité à droite : Découle de la linéarité à gauche et de la symétrie.

Positivité : Soit $P \in E$. On a $\langle P \mid P \rangle = \displaystyle\int_0^1 \frac{(P(x))^2}{1+x}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ en tant qu'intégrale d'une fonction positive.

Caractère défini : Soit $P \in E$ tel que $\langle P \mid P \rangle = 0$. D'après le calcul précédent cela signifie que $\displaystyle\int_0^1 \frac{(P(x))^2}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$. Ainsi la fonction $x \mapsto \dfrac{(P(x))^2}{1+x}$ est continue, positive et d'intégrale nulle donc nécessairement pour tout $x \in [0\,;1]$, $\dfrac{(P(x))^2}{1+x} = 0$, *i.e.* $\forall x \in [0\,;1]$, $P(x) = 0$. Par conséquent le polynôme P admet une infinité de racines (tout les réels de l'intervalle $[0\,;1]$) donc il s'agit du polynôme nul.

Finalement, $\boxed{\langle \cdot \mid \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } E}$.

Q7. Les vecteurs 1 et X sont-ils orthogonaux pour ce produit scalaire ?

Comme $\langle 1 \mid X \rangle = \displaystyle\int_0^1 \frac{1 \times x}{1+x}\,\mathrm{d}x = I_1 \overset{\textbf{Q2}}{=} 1 - \ln 2 \neq 0$, $\boxed{\text{les vecteurs 1 et } X \text{ ne sont pas orthogonaux}}$.

Q8. On note $L(X^2)$ le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$. Justifier l'existence de deux réels α et β tel que $L(X^2) = \alpha X + \beta$.

En tant que projeté d'un vecteur sur $\mathbb{R}_1[X]$, on a $L(X^2) \in \mathbb{R}_1[X] = \operatorname{Vect}(1, X)$. Autrement dit $\boxed{L(X^2) \text{ s'écrit } \alpha X + \beta \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2}$.

Q9. Que peut-on dire du polynôme $X^2 - L(X^2)$ par rapport à l'espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$? En déduire que (α, β) est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} I_1\alpha + I_0\beta = I_2, \\ I_2\alpha + I_1\beta = I_3. \end{cases}$$

- En tant que projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$, on a $\boxed{X^2 - L(X^2) \in \mathbb{R}_1[X]^\perp}$. (Faire un dessin.)
- Comme $(1, X)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$, $X^2 - L(X^2) \in \mathbb{R}_1[X]^\perp$ si et seulement si

$$\begin{cases} \langle 1 \mid X^2 - L(X^2) \rangle = 0 \\ \langle X \mid X^2 - L(X^2) \rangle = 0 \end{cases} \overset{\textbf{Q8}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \langle 1 \mid X^2 - \alpha X - \beta \rangle = 0 \\ \langle X \mid X^2 - \alpha X - \beta \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\overset{\text{lin. droite}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \langle 1 \mid X^2 \rangle - \alpha \langle 1 \mid X \rangle - \beta \langle 1 \mid 1 \rangle = 0 \\ \langle X \mid X^2 \rangle - \alpha \langle X \mid X \rangle - \beta \langle X \mid 1 \rangle = 0 \end{cases}$$

Or on a $\langle 1 \mid 1 \rangle = I_0$, $\langle 1 \mid X \rangle = \langle X \mid 1 \rangle = I_1$, $\langle X \mid X \rangle = \langle 1 \mid X^2 \rangle = I_2$ et $\langle X \mid X^2 \rangle = I_3$ d'où le système $\begin{cases} I_2 - \alpha I_1 - \beta I_0 = 0 \\ I_3 - \alpha I_2 - \beta I_1 = 0 \end{cases}$ qui se réécrit $\boxed{\begin{cases} I_1\alpha + I_0\beta = I_2, \\ I_2\alpha + I_1\beta = I_3. \end{cases}}$

Q10. Justifier l'existence du réel m et l'égalité $m = \|X^2 - \alpha X - \beta\|^2$. On ne demande pas de simplifier cette expression.

Commençons par remarquer que

$$\int_0^1 \frac{(x^2 - ax - b)^2}{1 + x} \, \mathrm{d}x = \left\langle X^2 - aX - b \mid X^2 - aX - b \right\rangle = \|X^2 - aX - b\|^2.$$

Ainsi $m = \inf\left\{\|X^2 - aX - b\|^2,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\} = \inf\left\{\|X^2 - P(X)\|^2,\ P \in \mathbb{R}_1[X]\right\}$, ce qui est la définition du carré de la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

D'après le cours, cette distance est finie donc $\boxed{m \text{ existe}}$. De plus, cet inf est un min et il est atteint pour le projeté orthogonal, *i.e.* cette distance vaut $\|X^2 - L(X^2)\|$ (encore une fois faire un dessin), d'où via **Q8**, $\boxed{m = d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2 = \|X^2 - \alpha X - \beta\|^2}$.